TRABAJO DE ÁLGEBRA LINEAL

I) Sea $V = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, probamos los 8 supuestos de los espacios vectoriales

a. $x+y = y+x \quad , \forall x,y \in V$

i) $(a,b)+(c,d) = (ac,bd) = (ca,db) = (c,d)+(a,b)$ (VERDADERO)

ii) $(a,b)+(c,d) = (a+d, b+c) = (d+a, c+b) = (d,c)+(a,b)$ (FALSO)

$\neq$

iii) $(a,b)+(c,d) = (ac,bd) = (ca,db) = (c,d)+(a,b)$ (VERDADERO)

iv) $(a,b)+(c,d) = (0,0) \wedge (c,d)+(a,b) = (0,0)$ (VERDADERO)

$=$

v) $(a,b)+(c,d) = (ac,bd) = (ca,db) = (c,d)+(a,b)$ (VERDADERO)

vi) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d)+(a,b)$ (VERDADERO)

b. $(x+y)+z = x+(y+z) \quad , \forall x,y,z \in V$

i) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (ac,bd)+(e,f) = (ace,bdf)$ (VERDADERO)

$= (a(ce), b(df)) = (a,b)+(ce,df) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

ii) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+d, b+c)+(e,f) = (a+d+f, b+c+e)$ $\neq$ (FALSO)

$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(c+f, d+e) = (a+d+e, b+c+f)$

iii) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)$ ... similar a i) (VERDADERO)

iv) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (0,0)+(e,f) = (0,0)$ $=$ (VERDADERO)

$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(0,0) = (0,0)$

v) similar a i) (VERDADERO)

vi) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+c, b+d)+(e,f) = (a+c+e, b+d+f)$ $=$ (VERDADERO)

$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)$

c. $\exists! 0 \in V : x+0 = x \quad , \forall x \in V$

i) $(a,b)+(0_1,0_2) = (a0_1, b0_2) = (a,b) \rightarrow 0_1 = 0_2 = 1 \rightarrow 0 = (1,1) \in V$ (VERDADERO)

ii) $(a,b)+(0_1,0_2) = (a+0_2, b+0_1) = (a,b) \rightarrow 0_1 = 0_2 = 0 \rightarrow 0 = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

iii) ... similar a i) (VERDADERO)

iv) $(a,b)+(0_1,0_2) = (0,0) = (a,b) \rightarrow \nexists\, 0_1, 0_2 \in \mathbb{R}$ (FALSO)

v) ... similar a i) (VERDADERO)

vi) $(a,b)+(0_1,0_2) = (a+0_1, b+0_2) = (a,b) \rightarrow 0_1 = 0_2 = 0 \rightarrow 0 = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

d. $\forall x \in V, \exists x' \in V : x+x' = 0$

i) $(a,b)+(a',b') = (aa', bb') = (0,0) \rightarrow a' = b' = 0 \rightarrow (a',b') = (0,0) \in V$ (VERDADERO)

ii) $(a,b)+(a',b') = (a+b', b+a') = (0,0) \rightarrow b' = -a, \; a' = -b \rightarrow (a',b') = (-b,-a) \in V$ (VERDADERO)

iii) ... similar a i) (VERDADERO)

iv) $(a,b)+(a',b') = (0,0) = (0,0) \rightarrow a',b' \in \mathbb{R} \rightarrow (a',b') \in V$ (VERDADERO)

v) ... similar a i) (VERDADERO)

vi) $(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b') = (0,0) \rightarrow a' = -a, b' = -b \rightarrow (a',b') = (-a,-b) \in V$ (VERDADERO)

$\underline{e.}$ $1x = x \quad , \forall x \in V$

i) $1(a,b) = (1a, b) = (a,b)$ (VERDADERO)

ii) $1(a,b) = (1a, 1b) = (a,b)$ (VERDADERO)

iii) $1(a,b) = (1.a, 1.b) = (a,b)$ (VERDADERO)

iv) ... similar a ii) (VERDADERO)

v) ... similar a ii) (VERDADERO)

vi) $1(a,b) = (1.a, 0) = (a,0) \neq (a,b)$ (FALSO)

$\underline{f.}$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad , \forall x \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $\alpha[\beta(a,b)] = ((\alpha\beta)a, b) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

ii), iii), iv), v) $\alpha[\beta(a,b)] = \alpha(\beta a, \beta b) = (\alpha\beta a, \alpha\beta b) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

vi) $\alpha[\beta(a,b)] = \alpha(\beta a, 0) = (\alpha\beta a, 0) = (\alpha\beta)(a,b)$ (VERDADERO)

$\underline{g.}$ $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad , \forall x \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, b) = (\alpha a + \beta a, b)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, b) + (\beta a, b) = (\alpha\beta a^2, b^2)$

ii) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha a + \beta b, \alpha b + \beta a)$

iii) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha\beta a^2, \alpha\beta b^2)$

iv) $(\alpha+\beta)(a,b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \beta(a+b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (0,0)$

v) ... similar a iii) (FALSO)

vi) $(\alpha+\beta)(a,b) = ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$ $=$ (VERDADERO)
$\alpha(a,b) + \beta(a,b) = (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) = (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b)$

$\underline{h.}$ $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad , \forall x, y \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(ac, bd) = (\alpha ac, bd)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, b) + (\alpha c, d) = (\alpha^2 ac, bd)$

ii) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(a+d, b+c) = (\alpha(a+d), \alpha(b+c)) = (\alpha a + \alpha d, \alpha b + \alpha c)$ (VERDADERO)
$\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = \cancel{(\alpha^2 ac, \alpha^2 b)} = (\alpha a + \alpha d, \alpha b + \alpha c)$

iii) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(ac, bd) = (\alpha ac, \alpha bd)$ $\neq$ (FALSO)
$\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha^2 ac, \alpha^2 bd)$

iv) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(0,0) = (0,0)$ $=$ (VERDADERO)
$\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (0,0)$

v) ... similar a iii) (FALSO)

vi) $\alpha[(a,b) + (c,d)] = \alpha(a+c, b+d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$ $=$ (VERDADERO)
$\alpha(a,b) + \alpha(c,d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) = (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d)$

Rpta: Sólo vi) es un espacio vectorial

2. $V=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a+6b=0\}$

~~$(a,b)+(c,d) = (-6b,b)+(-6d,d) = (-6(b+d), b+d)$~~

~~llamamos $e=b+d \Rightarrow (-6e, e) \in V$ (VERDADERO)~~

Por la operabilidad en $\mathbb{R}^2$ la 1°, 2°, 5°, 6°, 7°, 8° hipótesis se cumplen

3° $\exists! 0 \in V: x+0=x, \forall x\in V$

$\rightarrow (a,b)+(0_1,0_2)=(a,b) \Rightarrow 0=(0,0)$ $\quad 0+6.0=0$ $\quad$ (VERDADERO)

$0_1=0_2=0$ $\quad \rightarrow 0\in V$

Además
$(a,b)+(c,d)$
$(-6b,b)+(-6d,d)$
$(-6(b+d), b+d)$
$(-6e,e)\in V$

$K(a,b)$
$K(-6b,b)$
$(-K6b, Kb)$
$(-6(Kb), Kb)$
$(-6e,e)\in V$

4° $\forall x\in V, \exists x'\in V: x+x'=0$

$\rightarrow (a,b)+(a',b')=(0,0) \rightarrow (a',b')=(-a,-b)$ $\quad$ (VERDADERO)

$a'=-a,\ b'=-b$ $\quad (-a)+6(-b)=0 \quad \times(-1)$

Rpta: Es espacio vec. $\quad a+6b=0 \equiv V$

3. $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 3x-y=1\}$

Por la operabilidad en $\mathbb{R}^2$ la 1°, 2°, 5°, 6°, 7°, 8° hipótesis se cumple

$\rightarrow (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1,3x_1-1)+(y_1,3y_1-1)=(x_1+y_1, 3(x_1+y_1)-2) \notin V$

Rpta: No es espacio vec.

4. a) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4: x_1-x_4=0 \wedge x_2-x_4=x_3\}$

$\rightarrow 0=(0,0,0,0)$ $\quad 0-0=0 \wedge 0-0=0 \Rightarrow 0\in S$

$\rightarrow \alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4)=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3, \alpha x_4+\beta y_4)$

$\alpha x_1+\beta y_1-(\alpha x_4+\beta y_4)=0 \quad \wedge \quad \alpha x_2+\beta y_2-(\alpha x_4+\beta y_4)=\alpha x_3+\beta y_3$

$\alpha(x_1-x_4)+\beta(y_1-y_4)=0 \qquad \alpha(x_2-x_4)+\beta(y_2-y_4)=$

$0+0=0 \qquad \alpha x_3+\beta y_3=\alpha x_3+\beta y_3$

Rpta: S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=3x, x=2y\}$

$\rightarrow 0=(0,0,0)$ $\quad 0=3.0 \wedge 0=2.0 \rightarrow 0\in M$

$\rightarrow \alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)$

$\alpha x_3+\beta y_3=3(\alpha x_1+\beta y_1) \quad \wedge \quad \alpha x_1+\beta y_1=2(\alpha x_2+\beta y_2)$

$3\alpha x_1+3\beta y_1=3(\alpha x_1+\beta y_1) \qquad 2\alpha x_2+2\beta y_2=2(\alpha x_2+\beta y_2)$

Rpta: M es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

c) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xy=0\}$

$\to 0=(0,0,0) \quad 0.0=0 \quad \to 0\in U$

$\to \alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)$

$\to (\alpha x_1+\beta y_1)(\alpha x_2+\beta y_2)=0$

$\alpha^2 \cancel{x_1 x_2} + \alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \beta^2 \cancel{y_1 y_2} = 0$

$\alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0$ Contradicción

Rpta: U no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

---

5. I) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{[a\ -a\ a]^T, a\in\mathbb{R}\}$

$\to 0=[0;0,0]^T \quad 0\in\mathbb{R} \quad \to 0\in W$

$\to \alpha\begin{bmatrix}a\\-a\\a\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b\\-b\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a+\beta b\\-\alpha a-\beta b\\\alpha a+\beta b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha a+\beta b)\\-(\alpha a+\beta b)\\(\alpha a+\beta b)\end{bmatrix}\in W$

Rpta: W es subesp. vec. de $\mathbb{R}^3$.

II) $V=M_3$, $W=\{A\in M_3 : |A|=0\}$

$\to A+0=A \to 0=[0]_{3\times 3} \quad |0|=0 \to 0\in W$

$\to \alpha A+\beta B = \cancel{\alpha[a_{ij}]_{3\times 3}+\beta[b_{ij}]_{3\times 3}=[\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}]_{3\times 3}} = C \notin W$

$|C|=|\alpha A+\beta B|$ no siempre cumple

Rpta: W no es subespc. vec. de M_3

---

6. Sean $v_1=(1,-1,2)$, $v_2=(2,0,1)$ y $m=(4,-2,5)$, $n=(1,-1,-1)$

Suponemos $m=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\to\\1\\-2\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\-1&0&-2\\2&1&5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&2&2\\0&-3&-3\end{array}\right]$$

$\to \begin{array}{l}\alpha_1+2\alpha_2=4\\ \alpha_2=1 \to \alpha_1=2\end{array}$

$\therefore$ m es comb. lin. de v_1 y v_2

Suponemos $n=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2$

$$\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\to\\1\\-2\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&1\\-1&0&-1\\2&1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&2&0\\0&-3&-3\end{array}\right]\to$$

$\alpha_1+2\alpha_2=1$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_2=0\\\alpha_2=1\end{array}\right]$ Incompatible

$\therefore$ n no es comb. lin de v_1 y v_2

7. a) $\{x, 2x - x^2, 6x - 2x^2\}$ en P_2

Probamos si son l.i.

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(2x - x^2) + \alpha_3(6x - 2x^2) = 0$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + (-\alpha_2 - 2\alpha_3)x^2 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)x = 0$$

$$x = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3}{\alpha_2 + 2\alpha_3} \rightarrow \alpha_2 \neq 0 \wedge \alpha_3 \neq 0$$

$\therefore$ no son l.i.

Probamos si Genera a P_2

$\rightarrow ax^2 + bx + c = \alpha_1(x) + \alpha_2(2x - x^2) + \alpha_3(6x - 2x^2)$

$ax^2 + bx + c = (-\alpha_2 - 2\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + 0$

$\rightarrow a = -\alpha_2 - 2\alpha_3 \neq 0$

$b = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \Rightarrow$

$c = 0$

$$0.\alpha_1 + (-1).\alpha_2 + (-2).\alpha_3 = a$$
$$1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 6.\alpha_3 = b$$
$$0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3 = c$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & a \\ 1 & 2 & 6 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & b \\ 0 & 1 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

el sistema es incompatible = no hay sol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rpta: $\therefore$ no es base

b) $\{1 - 2x, 3x + x^2 - x^3, 1 + x^2 + 2x^3, 3 + 2x + 3x^3\}$ en P_3

Probamos si son L.I.

$$\alpha_1(1 - 2x) + \alpha_2(3x + x^2 - x^3) + \alpha_3(1 + x^2 + 2x^3) + \alpha_4(3 + 2x + 3x^3) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4) + (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4)x^3 = 0$$

$$1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 3.\alpha_4 = 0$$
$$-2.\alpha_1 + 3.\alpha_2 + 0.\alpha_3 + 2.\alpha_4 = 0$$
$$0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 0.\alpha_4 = 0$$
$$0.\alpha_1 + (-1).\alpha_2 + 2.\alpha_3 + 3.\alpha_4 = 0$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ -3 \\ \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = 0$
$\alpha_3 = 0$
$\alpha_4 = 0$

$\rightarrow$ son L.I.

Probamos si generan a P_3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha_1(1 - 2x) + \alpha_2(3x + x^2 - x^3) + \alpha_3(1 + x^2 + 2x^3) + \alpha_4(3 + 2x + 3x^3)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (-\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4)x^3 + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4)x + (\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4)$$

la matriz de coeficientes del SEL (igual al de la anterior parte) es $\neq 0$, por lo que el sistema tiene solución y permite generar a P_3.

$\therefore$ Es base de P_3

8. Si $A=\{u,v,w\}\subset V$, es un conjunto L.I., determinar la D.L. o I.L. del $B=\{\alpha u+\beta v, \lambda v-\alpha w, \beta w+\lambda v\}$, para $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$.

Sabemos que $a_1u+a_2v+a_3w=0 \to a_1=a_2=a_3=0$

Queremos probar $b_1(\alpha u+\beta v)+b_2(\lambda v-\alpha w)+b_3(\beta w+\lambda v)=0 \to b_1=b_2=b_3=0$ o $\exists b_i\neq 0, i=1,2,3$

$\to b_1\alpha u+(b_1\beta+b_2\lambda+b_3\lambda)v+(b_3\beta-b_2\alpha)w=0$

$\approx$

$a_1u+a_2v+a_3w=0$

$b_1\alpha=0 \wedge b_1\beta+b_2\lambda+b_3\lambda=0 \wedge b_3\beta-b_2\alpha=0$

$(\alpha=0 \vee b_1=0) \wedge \alpha b_1\beta+\alpha b_2\lambda+\alpha b_3\lambda=0 \quad \beta b_3=\alpha b_2$

$\beta b_3\lambda+\alpha b_3\lambda=0$

$(\lambda b_3=0 \vee \alpha+\beta=0)$

Suponemos $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\to b_1=0$ Si $b_3=0 \to b_2=0$ $\therefore$ Existe el caso donde $b_2\neq 0 \vee b_3\neq 0$

Si $\alpha=-\beta \to b_2+b_3=0$

Rpta: Si $\alpha=-\beta$, B es L.D.

Si $\alpha\neq-\beta$, B es L.I.

9. Si $B=\{1,e^x,e^{2x},e^{3x},e^{4x}\}$

Probamos

$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot e^x+\alpha_3\cdot e^{2x}+\alpha_4\cdot e^{3x}+\alpha_5\cdot e^{4x}=0 \to \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0$

Suponemos el SE tiene solución

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&e^x&0&0&0\\0&0&e^{2x}&0&0\\0&0&0&e^{3x}&0\\0&0&0&0&e^{4x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&e^x&0&0&0\\0&0&e^{2x}&0&0\\0&0&0&e^{3x}&0\\0&0&0&0&e^{4x}\end{vmatrix}\neq 0$$

$e^x\cdot e^{2x}\cdot e^{3x}\cdot e^{4x}\neq 0$ $\therefore$ $\alpha_i=0, \forall i$, es decir, B es L.I.

$e^{10x}\neq 0$

Se sabe que $e^{10x}>0$

10. Si $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ es L. I. Determinar la linealidad de

$A = \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$

Sabemos $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Probamos $\beta_1 v_1 + \beta_2(v_2 - v_1) + \dots + \beta_m(v_m - v_1) = 0$

$(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots - \beta_m)v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = 0$

$\to \left(\beta_1 - \sum_{i=2}^{m} \beta_i\right) = 0 \wedge \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m = 0$ $\therefore \beta_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$

$\beta_1 = \sum_{i=2}^{m} \beta_i = \sum_{i=2}^{m} 0 = 0$

Rpta: A es L. I.

---

11. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vec. y los subespacios W_1 y W_2 demostrar

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

Tenemos $W_1 + W_2 = \{w \in V : w = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

si Tenemos $\text{gen}(W_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\text{gen}(W_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ y $\text{gen}(W_1 \cap W_2) = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$

y $\alpha \in \mathbb{R}^n \wedge \beta \in \mathbb{R}^m \wedge \theta \in \mathbb{R}^p$

$w = \alpha \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) + \beta \cdot (v_1, v_2, \dots, v_m)$

entonces w es una combinación lineal de $n+m$ vectores, mas no sabemos si son L. I.

Digamos que ~~$\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ genera a $W_1 + W_2$~~ $\{e_1, e_2, \dots, e_q\} = \text{gen}(W_1 + W_2)$

$\to \{e_1, e_2, \dots, e_q\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ya que pueden ser L. I. o no entonces $q \leq n+m$

$\text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$.

$n(\text{gen}(W_1 + W_2)) = n(\text{gen}(W_1)) + n(\text{gen}(W_2)) - n(\text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2)) \dots (L)$

Ahora Tenemos $W_1 \cap W_2 = \{w \in V : w \in W_1 \wedge w \in W_2\}$ por lo que

$w = \alpha \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = \beta \cdot (v_1, v_2, \dots, v_m) \to \alpha \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) - \beta(v_1, v_2, \dots, v_m) = 0$

Si de esta igualdad extraemos algunos α_i o β_i que no son nulos y otros que sí. Los que son nulos se recolectan en $\{\theta_i\}_{i=1}^{p}$ y sus respectivos vectores en $\{s_i\}_{i=1}^{p}$

e.g. un $k, j \in [1, p] \cap \mathbb{N} \to \alpha_j \cdot u_j = \beta_k \cdot v_k \to \{\alpha_j, \beta_k\} \in \{\theta_i\}_{i=1}^{p} \wedge \{u_j, v_k\} \subset \{s_i\}_{i=1}^{p}$

entonces hay algunos u's y v's que serán iguales o no

$\to \{s_i\}_{i=1}^{p} = \{u_i\}_{i=1}^{n} \cap \{v_i\}_{i=1}^{m}$

$\text{gen}(W_1 \cap W_2) = \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2)$

Volviendo a ... (L)

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - n(\text{gen}(W_1 \cap W_2))$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

13. Demostrar que $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, si W_1, W_2 son sub.vec. de V

Retomamos una línea antes de ...(1) en 12.

$$\text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$$

Tenemos $W_1 \cup W_2 = \{ w \in V : w \in W_1 \vee w \in W_2 \}$

$$\Rightarrow w = \alpha . u \vee w = \beta . v$$

Tres casos

① $w = \alpha . u$ ② $w = \beta . v$ ③ $w = \alpha . u = \beta . v$

por lo tanto a w lo generan todos los elementos de u y de v, sin embargo si al momento de evaluar $\alpha . u - \beta . v = 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0$ $\text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$

$\wedge \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2) = \emptyset$

pero si: $\exists \alpha_i, \beta_j \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ $\text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$

$\wedge \text{gen}(W_1) \cap \text{gen}(W_2) \neq \emptyset$

En cualquier caso, $\text{gen}(W_1 \cup W_2) = \text{gen}(W_1) \cup \text{gen}(W_2)$

$$\rightarrow \text{gen}(W_1 + W_2) = \text{gen}(W_1 \cup W_2)$$

$$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

---

14. Determinar una base para cada subespacio de $\mathbb{R}^4$.

$F = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_1) = x_1 (1, 1, 1, 1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\therefore F = \langle (1,1,1,1) \rangle$$

$G = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 \wedge x_3 = x_4 \}$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 0, x_3, x_3)$$
$$= x_1 (1, 1, 0, 0) + x_3 (0, 0, 1, 1) \; ; x_1, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow G = \langle (1,1,0,0) ; (0,0,1,1) \rangle$$

$H = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 \}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_4) = (x_1, x_1, x_1, 0) + (0, 0, 0, x_4) = x_1 (1, 1, 1, 0) + x_4 (0, 0, 0, 1) ; x_1, x_4 \in \mathbb{R}$

$$\therefore H = \langle (1, 1, 1, 0) ; (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$K = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)$

$\therefore K = \langle (-1,1,0,0) ; (-1,0,1,0) ; (-1,0,0,1) \rangle$ $= x_2 (-1, 1, 0, 0) + x_3 (-1, 0, 1, 0) + x_4 (-1, 0, 0, 1)$

$x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

15. Hallar el vector de coordenadas

a. $p(x) = -x + 3x^2$ con respecto a la base $B = \{1+x, 1-2x, x^2\}$ de P_2

$\rightarrow -x + 3x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-2x) + \alpha_3(x^2)$

$3x^2 - x = \alpha_3 x^2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2)x + (\alpha_1 + \alpha_2)$

$$\begin{aligned} 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 &= 3 \\ 1.\alpha_1 - 2.\alpha_2 + 0.\alpha_3 &= -1 \\ 1.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_1 = -1/3$, $\alpha_3 = 3$ $\therefore [p(x)]_B = (-1/3, 1/3, 3)$

b. $W = [1 \ 6 \ 2]^T$ con respecto a la base $B = \{[1 \ -1 \ 5]^T, [2 \ -1 \ 3]^T, [0 \ 0 \ 2]^T\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \rightarrow \\ +1 \\ -5 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} -2 \\ \rightarrow \\ +7 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 46 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -13 \\ \alpha_2 &= 7 \\ \alpha_3 &= 23 \end{aligned} \quad \therefore [W]_B = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ 23 \end{bmatrix} = (-13, 7, 23)$$

16. Determinar si B es una base del espacio vectorial V.

a. $B = \{x, 1+x, 1-x, x^2+x+1\}$, $V = P_2$

Comprobamos si los elementos de B son L.I.

$\alpha_1(x) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1-x) + \alpha_4(x^2+x+1) = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

$\alpha_4 x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)x + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0.x^2 + 0.x + 0$

$$\begin{aligned} 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3 + 1.\alpha_4 &= 0 \\ 1.\alpha_1 + 1.\alpha_2 - 1.\alpha_3 + 1.\alpha_4 &= 0 \\ 0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 1.\alpha_4 &= 0 \end{aligned} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ -1 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2\alpha_2 &= -\alpha_1 \\ \alpha_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\therefore$ B no es L.I., ergo, no es base de P_2

b. $B = \{1-x, 1-x^2, x-x^2\}$, $V = P_2$

Comprobamos si los elementos de B son L.I.

$\alpha_1(1-x) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(x-x^2) = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$(-\alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0.x^2 + 0.x + 0$

$0.\alpha_1 - 1.\alpha_2 - 1.\alpha_3 = 0$ (-1)
$-1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 = 0$
$1.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 = 0$ $+1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

El SEL no Tiene solución.

$\to \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_3 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\therefore$ B no es base de P_2

C.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad V = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

dada la similitud de bases y el conjunto generador de V, bastaría probar

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha_2 = 1 \wedge \alpha_1 = 1$ por lo tanto

$$V = \text{gen}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right) = \text{gen}(B)$$

Rpta: B es base de V

---

17. Si $A = \{(1,1,2,1) ; (-1,2,0,1) ; (5,-1,6,1)\} \in \mathbb{R}^4$, determine una base para gen(A).

gen(A) es el conjunto de $g \in \mathbb{R}^4$ Tal que

$$g = \alpha_1 (1,1,2,1) + \alpha_2 (-1,2,0,1) + \alpha_3 (5,-1,6,1) \; ; \; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Probemos su linealidad

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 1 & 2 & -1 & g_2 \\ 2 & 0 & 6 & g_3 \\ 1 & 1 & 1 & g_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 3 & -6 & g_2 - g_1 \\ 0 & 2 & -4 & g_3 - 2g_1 \\ 0 & 2 & -4 & g_4 - g_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}(g_3 - 2g_1) \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - g_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{3}g_2 - \frac{4}{3}g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - 2g_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & g_1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3}(g_2 - g_1) \\ 0 & 0 & 0 & 3g_3 - 2g_2 - 8g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 + g_1 - 2g_3 \end{array}\right]$$

Obtenemos que $3g_3 = 2g_2 + 8g_1 \wedge g_4 + g_1 = 2g_3$

$\to (2g_1, 2g_2, 2g_3, 2g_4) = (2g_1, 3g_3 - 8g_1, 2g_3, 4g_3 - 2g_1)$

$= (2g_1, -8g_1, 0, -2g_1) + (0, 3g_3, 2g_3, 4g_3)$

$= g_1(2, -8, 0, -2) + g_3(0, 3, 2, 4)$

$= 2g_1(1, -4, 0, -1) + g_3(0, 3, 2, 4)$

$\therefore A = \langle (1,-4,0,-1) ; (0,3,2,4) \rangle$

18. Describa el espacio ~~vectorial~~ generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(1,0,1,-1);(1,-1,0,1);(0,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = \text{gen}(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = \alpha_1(1,0,1,-1) + \alpha_2(1,-1,0,1) + \alpha_3(0,0,0,0)$$

$$\begin{array}{r}\rightarrow\\ \\ -1\\ +1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 0 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & v_4 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ (-1)\rightarrow\\ -1\\ +2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & -1 & 0 & v_3-v_1 \\ 0 & 2 & 0 & v_4+v_1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r}-1\\ \rightarrow\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3-v_1-v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4+v_1+2v_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1+v_2 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3-v_1-v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4+v_1+2v_2 \end{array}\right]$$

Tenemos que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_1 + 2v_2 + v_4 = 0$.

$\therefore$ $\text{gen}(A) = \{(v_1,v_2,v_3,v_4) : v_1 + v_2 = v_3 \text{ y } v_1 + 2v_2 + v_4 = 0\}$

$$(v_1,v_2,v_3,v_4) = (v_1, v_2, v_1+v_2, -v_1-2v_2) = (v_1, 0, v_1, -v_1) + (0, v_2, v_2, -2v_2)$$
$$= v_1(1,0,1,-1) + v_2(0,1,1,-2)$$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1);(0,1,1,-2) \rangle$

$\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1);(0,1,1,-2) \rangle = \langle (-1,0,-1,1);(0,-1,-1,2) \rangle$

b. $B = \{1+x; x^3 - x^2\} \subset P_3$

Sea $\text{gen}(B)$ el esp. vec. generado por B, para todo $p \in \text{gen}(B)$ se tiene que

$$p = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^3 - x^2)$$
$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (+\alpha_2)x^3 + (-\alpha_2)x^2 + (\alpha_1)x + \alpha_1$$

$\rightarrow a_3 = \alpha_2$, $a_2 = -\alpha_2$, $a_1 = \alpha_1$, $a_0 = \alpha_1$ $\Rightarrow$ $a_3 = -a_2$, $a_1 = a_0$

$\text{gen}(B) = \{p \in P_2 : p = ax^3 - ax^2 + bx + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Probamos la linealidad de B

$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^3 - x^2) = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ $\therefore$ B es L.I.

$\alpha_2x^3 - \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_1 = 0$ $\quad$ B es base de $\text{gen}(B)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \rightarrow\\ -1\end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r}\rightarrow\\ +1\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\therefore \dim(\text{gen}(B)) = 2$

$\text{gen}(B) = \langle x^3 - x^2; 1+x \rangle = \langle x^2 - x^3; -1-x \rangle$

19. En $\mathbb{R}^3$ sobre los $\mathbb{R}$, dados los subespacios:

$W_1=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+2x_2-x_3=0\}$ y $W_2=\langle(2,-1,1);(1,2,3)\rangle$

Determinar

i) W_1+W_2

$W_1+W_2=\{w\in\mathbb{R}^3 : w=w_1+w_2 ;\ w_1\in W_1 \wedge w_2\in W_2\}$

En W_1, $(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+2x_2)=(x_1,0,x_1)+(0,x_2,2x_2)$

$=x_1(1,0,1)+x_2(0,1,2)$

$\therefore w_1=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,2);\ \forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

En W_2, $w_2=\beta_1(2,-1,1)+\beta_2(1,2,3);\ \forall\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$

$\to w=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,2)+\beta_1(2,-1,1)+\beta_2(1,2,3)$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&2\\1&2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&w_1\\0&1&-1&2&w_2\\1&2&1&3&w_3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&w_1\\0&1&-1&2&w_2\\0&2&-1&2&w_3-w_1\end{array}\right]\sim$$

$$\begin{array}{c}\\+1\\\to\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&w_1\\0&1&-1&2&w_2\\0&0&1&-2&w_3-w_1-2w_2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&w_1\\0&1&0&0&w_3-w_1-w_2\\0&0&1&-2&w_3-w_1-2w_2\end{array}\right]$$

la máxima dimensión de W_1+W_2 es 3, por lo que algún vector debe ser c.l. de los demás

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&2\\1&2&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\1&2&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&2&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$\uparrow$

el cuarto vector es c.l. de los demás $\therefore$

$w=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,2)+\beta_1(2,-1,1)$

$\therefore W_1+W_2=\langle(1,0,1);(0,1,2);(2,-1,1)\rangle$

ii) $W_1\cap W_2$

$W_1\cap W_2=\{w\in\mathbb{R}^3: w\in W_1\wedge w\in W_2\}$

de ... i) Tenemos que

$w=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,2)=\beta_1(2,-1,1)+\beta_2(1,2,3)$

$\to \alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,2)+\beta_1(-2,1,-1)+\beta_2(-1,-2,-3)=0$

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&1&-2\\1&2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Sin embargo sabemos que el 4to vector es c.l. de los 3 primeros.

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\1&2&-1&0\end{array}\right]\sim$$

$$\begin{array}{c}\\\to\\-2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}-2\\+1\\(-1)\to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=0$$

es decir son L.I. por lo que

De ... ii obtenemos que

$(1,2,3)=\theta_1(1,0,1)+\theta_2(0,1,2)+\theta_3(2,-1,1)$

∘∘∘

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \theta_1 \\ 0 & 1 & -1 & \theta_2 \\ 1 & 2 & 1 & \theta_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$\rightarrow \theta_1 = 5,\ \theta_2 = 0,\ \theta_3 = -2$

$\therefore\ (1,2,3) = 5.(1,0,1) - 2.(2,-1,1)$

Reemplazamos

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,2) = \beta_1(2,-1,1) + \beta_2(5.(1,0,1) - 2.(2,-1,1))$$

$$(\alpha_1 - 5\beta_2).(1,0,1) + \alpha_2(0,1,2) = (\beta_1 - 2\beta_2).(2,-1,1)$$

$$(\alpha_1 - 5\beta_2).(1,0,1) + \alpha_2.(0,1,2) + (2\beta_2 - \beta_1).(2,-1,1) = 0$$

dado que son L.I.

$\alpha_1 = 5\beta_2,\ \alpha_2 = 0,\ 2\beta_2 = \beta_1$

$\rightarrow \beta_2 \in (-\infty, \infty) \wedge \alpha_2 = 0 \wedge 2\alpha_1 = 5\beta_1 = 10\beta_2$

$$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1\left(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right) + \beta_2(1,2,3)$$

$$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1\left(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right) + \alpha_1\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right)$$

$$\alpha_1(1,0,1) = \alpha_1(1,0,1)$$

$\rightarrow w = \alpha_1(1,0,1)$

$\therefore\ W_1 \cap W_2 = \langle(1,0,1)\rangle$

iii) Por ...i) sabemos que $W_1 + W_2 = \langle(1,0,1); (0,1,2); (2,-1,1)\rangle$

$\rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3$

iv) Por ... ii) sabemos que $W_1 \cap W_2 = \langle(1,0,1)\rangle$

$\rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$

---

20) En $\mathbb{R}^3$, sea W el subespacio generado por $A = \{(1,2,-2); (5,4,-4); (0,1,-1)\}$

Determinar:

i) Una base de W y $\dim(W)$

$W = \text{gen}(A) = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = \alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(0,1,-1);\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

Probamos la linealidad de A

$\alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(0,1,-1) = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & \alpha_1 \\ 2 & 4 & 1 & \alpha_2 \\ -2 & -4 & -1 & \alpha_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ Son L.D. por lo tanto eliminaremos alguno

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer vector es L.D. de los otros dos, por lo tanto

$w = \alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4)$ los vectores son L.I. y generan a W

$\therefore W = \langle (1,2,-2);(5,4,-4)\rangle$ y $\dim(W) = 2$

ii) Extender la base de W a una base de $\mathbb{R}^3$

queremos un $A = \{(1,2,-2);(5,4,-4);(e_1,e_2,e_3)\}$ Tal que sean L.I. y $\mathbb{R}^3 = \text{gen}(A)$.

primero la Independencia Lineal

$\alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(e_1,e_2,e_3) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & e_1 \\ 2 & 4 & e_2 \\ -2 & -4 & e_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2 \\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \to \\ +1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & e_1 & 0 \\ 2 & 4 & e_2 & 0 \\ -2 & -4 & e_3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \to \\ -2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & e_1 & 0 \\ 2 & 4 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2+e_3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{6}) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & e_1 & 0 \\ 0 & -6 & e_2-2e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_2+e_3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & e_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6}(e_2-2e_1) & 0 \\ 0 & 0 & e_2+e_3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & e_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(2e_1-e_2) \\ 0 & 0 & e_2+e_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ para que el S.E.L Tesa sol. única.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{6}e_2 \\ 0 & e_2+e_3 \end{vmatrix} \neq 0 \to (e_2+e_3) \neq 0$$

$e_2 \neq -e_3$ para que A sea L.I.

luego tenemos que $\mathbb{R}^3 = \text{gen}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha_1(1,2,-2) + \alpha_2(5,4,-4) + \alpha_3(e_1,e_2,e_3);\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\}$

Elegimos $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$

$\therefore A = \{(1,2,-2);(5,4,-4);(1,1,0)\}$ es L.I. y genera a $\mathbb{R}^3$ pues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sin restricción

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,-2);(5,4,-4);(1,1,0)\rangle$

21. Sea $V = \{A / A_{n\times n}\}$ y los subespacios $W_1 = \{A \in V / A = A^T\}$ y $W_2 = \{A \in V / A^T = -A\}$, demostrar que

i) W_1 y W_2 son subespacios

V es un espacio vectorial, las propiedades de pertenencia y operaciones se heredan a sus subconjuntos

$\to$ W será subespacio si: $\forall w_1, w_2 \in W : w = \alpha_1 w_1 + w_2 \in W, \alpha_1 \in \mathbb{R}$

$\wedge \exists 0 \in W : \forall w \in W, w + 0 = w$.

$\to$ en W_1, supongamos $0 \in W$ e igual a $0 = [0_{ij}]_{n\times n}$

$\to A + 0 = A$

$[a_{ij}]_{n\times n} + [0_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n} \to 0_{ij} = 0\ \forall i,j$

$\therefore 0 = [0]_{n\times n} \in W_1$ pues $[0]_{n\times n} = [0]^T_{n\times n}$, cumple la primera condición

Sea $A, B \in W_1$, $K \in \mathbb{R}$, entonces $C \in W_1$ tal que

$C = KA + B$

Transponemos C

$C^T = KA^T + B = KA + B = C$

$C^T = C \therefore C \in W_1$

$\therefore W_1$ es un subespacio vectorial de V

en W_2, sea $0 = [0_{ij}]_{n\times n}$ y $A \in W_2$

$A + 0 = A$

$[a_{ij}]_{n\times n} + [0_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n} \to 0_{ij} = 0, \forall i,j$

$\to 0 = [0]_{n\times n} \wedge 0^T = -0$ por lo que $0 \in W_2$, cumple la 1ra condición.

Sea $A, B \in W_2$, $k \in \mathbb{R}$, un $C \in V$ tal que

$$C = kA + B$$

Trasponemos

$$C^T = kA^T + B^T = k(-A) + (-B) = -kA - B = -(kA + B)$$

$$C^T = -C \rightarrow C \in W_2$$

$\therefore W_2$ es un subespacio vectorial de V

ii) $W_1 \oplus W_2$ ($W_1 + W_2$ es una suma directa $\Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$)

Si $W_1 + W_2$ es una suma directa, entonces $\dim(W_1 \cap W_2)$

$W_1 \cap W_2 = \{w \in W : w \in W_1 \wedge w \in W_2\}$

~~Sea~~ Supongamos $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, entonces un $C \in W_1 \cap W_2$ cumple

$$C \in W_1 \wedge C \in W_2$$

$$\rightarrow C = C^T \wedge C^T = -C$$

$$\rightarrow C = -C$$

$$2C = 0$$

$$C = 0$$ el único elemento de $W_1 \cap W_2$ es 0.

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$, la dimensión de un conjunto unitario es 0.

$\rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$

$\therefore W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

23. Demostrar que:

a. $\langle(1,3,5)\rangle = \langle(2,6,10)\rangle$

Sean los ~~subespacios~~ conjuntos $A = \{(1,3,5)\}$ y $B = \{(2,6,10)\}$ y los subespacios $\text{gen}(A)$, $\text{gen}(B)$.

$\rightarrow \text{gen}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha(1,3,5),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $\text{gen}(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta(2,6,10),\ \beta \in \mathbb{R}\}$

$y = (2\beta)(1,3,5)$

2β sigue siendo $\mathbb{R}$

$\forall x \in \text{gen}(A) \wedge y \in \text{gen}(B)$: $x = \alpha(1,3,5) = y = (2\beta)(1,3,5)$

$x = y$ pues solo es necesario que $\alpha = 2\beta$

$\rightarrow \text{gen}(A) = \text{gen}(B)$

$\langle(1,3,5)\rangle = \langle(2,6,10)\rangle$

b. $\langle(2,-1,6);(-3,4,1)\rangle = \langle(-1,3,7);(8,-4,24)\rangle$

Sean $A = \{(2,-1,6);(-3,4,1)\}$, $B = \{(-1,3,7);(8,-4,24)\}$ y $\text{gen}(A)$, $\text{gen}(B)$ sus subespacios.

$\text{gen}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1) = x;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, $\text{gen}(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta_1(-1,3,7) + \beta_2(8,-4,24)\}$

En $\text{gen}(B)$,

$$y = \beta_1(-1,3,7) + 4\beta_2(2,-1,6)$$

$$y = \beta_1(-1,3,7) + (4\beta_2 + \beta_1)\cdot(2,-1,6) - \beta_1(2,-1,6)$$

$$y = \beta_1(-3,4,1) + (4\beta_2 + \beta_1)\cdot(2,-1,6)$$

$$x = \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1)$$

Haciendo $\alpha_2 = \beta_1 \wedge \alpha_1 = 4\beta_2 + \beta_1$ por lo tanto habrán x e y iguales $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \text{gen}(A) = \text{gen}(B) \Leftrightarrow \langle(2,-1,6);(-3,4,1)\rangle = \langle(-1,3,7);(8,-4,24)\rangle$

23. Determinar qué vectores pertenecen al subespacio de P_3 generado por $S = \{x^3+2x^2+1, x^2-2, x^3+x\}$

I. $p(x) = 3 - x + x^2$

Verificamos si $x^2 - x + 3 = \alpha_1(x^3+2x^2+1) + \alpha_2(x^2-2) + \alpha_3(x^3+x)$

$x^2 - x + 3 = (\alpha_1+\alpha_3)x^3 + (2\alpha_1+\alpha_2)x^2 + \alpha_3 x + (\alpha_1 - 2\alpha_2)$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 = 0 \\ 2.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 = 1 \\ 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 = -1 \\ 1.\alpha_1 - 2.\alpha_2 + 0.\alpha_3 = 3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \rightarrow \\ -2 \\ \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ +2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 1 \rightarrow \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{array}$$

$\therefore$ $p(x)$ sí pertenece a S

II, III, IV se hacen de la misma forma, si no hay solución no pertenece (cuando hay infinitas soluciones sí pertenece).

---

24. Suponga que $B = \{v, w\}$ es una base de V. ¿Cuál es una base también?

a). $\{v+w, v\}$

Sabemos que B es L.I. y $V = \text{gen}(B)$, es decir

$\alpha_1 v + \alpha_2 w = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \;\wedge\; \forall x \in V : x = \alpha_1 v + \alpha_2 w$

evaluamos la L.I. del conjunto

$\beta_1(v+w) + \beta_2 v = 0$

$(\beta_1+\beta_2)v + \beta_1 w = 0 \rightarrow \beta_1+\beta_2 = 0 \wedge \beta_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$, es decir es L.I.

Luego tenemos un $x \in V$, que $x = \alpha_1 v + \alpha_2 w$; $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

queremos probar que $x = \beta_1(v+w) + \beta_2(v) = \alpha_1 v + \alpha_2 w$

$\longrightarrow \beta_1(v+w) + \beta_2 v - \alpha_1 v - \alpha_2 w = 0$

$(\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1)v + (\beta_1 - \alpha_2)w = 0 \rightarrow \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \wedge \alpha_2 = \beta_2$

es decir $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que las comb. lin. de $\{v, w\}$ y $\{v+w, v\}$ sean iguales, por lo tanto

$\{v+w, v\}$ es una base de V

b), c) se hacen de la misma forma, si no son L.I. no es base o si no se puede expresar cualquier comb. lin. de $\{v, w\}$ como la comb. lin. del conjunto dado tampoco es base.

25. Sea $V = \mathbb{R}^4$, y los subespacios

$W_1 = \{m \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_4 \wedge x_1 + 2x_4 = x_3\}$ y $W_2 = \{m \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4\}$

Determinar una base para $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ y su dimensión

El procedimiento es igual al problema 19.